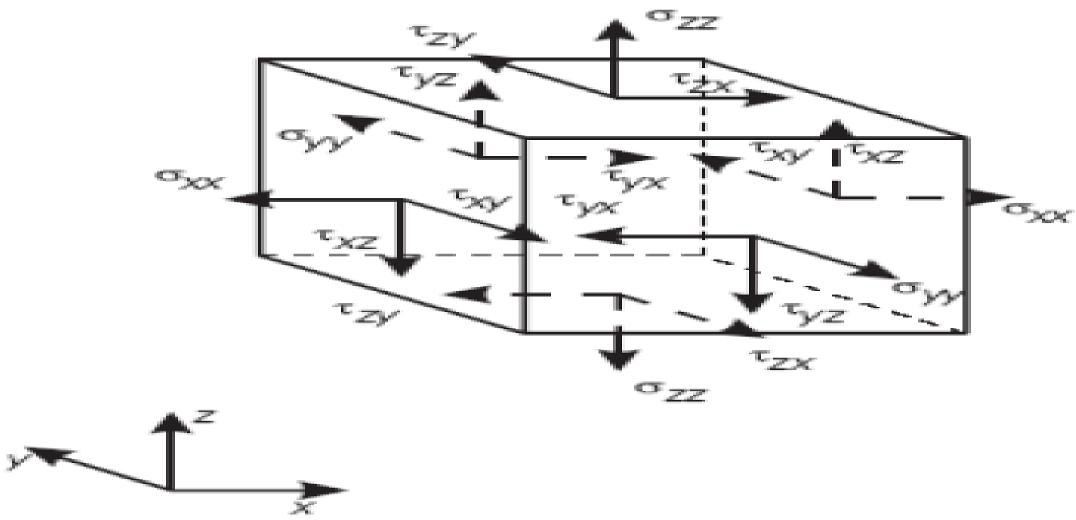
NAPONI I DEFORMACIJE

NAPONI I DEFORMACIJE

- Prikazan je opšti slučaj stanja napona u tački.
- Na svaku površinu elementarne kocke deluje normalni i smičući naponi na šest ravni od kojih su svake dve međusobno paralelne ravni infinitezimalno bliske.
- U otpornosti materijala i generalno u tehničkoj mehanici, usvojena je konvencija da su naponi zatezanja pozitivni. Dat je tenzor napona na slici.

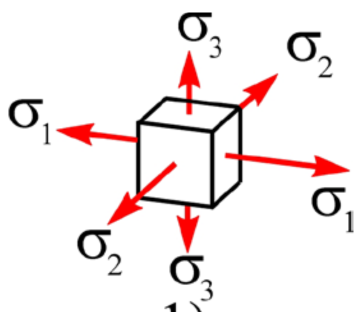


NAPONI I DEFORMACIJE

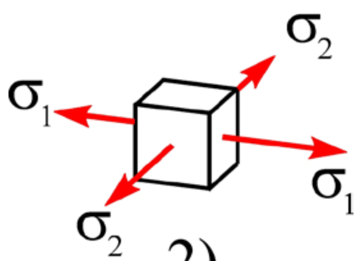
- **Pojam o glavnim naponima**
- Površine u kojima tangencijalnih napona nema a normalni naponi koji dejstvuju u tim površinama su glavni naponi.
- U teoriji elastičnosti se dokazuje da kroz svaku tačku napregnutog tela mogu da se postave tri međusobno upravne glavne površine. U jednoj od njih dejstvovaće maksimalni glavni napon s1, u drugoj s2, a u trećoj minimalni glavni napon s3.

NAPONI I DEFORMACIJE

U zavisnosti od toga da li se u tački napregnutog tela pojavljuje jedan, dva ili sva tri glavna napona razlikujemo tri vrste naponskog stanja tela:

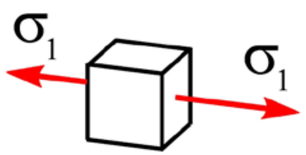


-prostorno stanje napona (Sl.1), gde je $\sigma_i \neq 0$,



-prostorno stanje napona (Sl.2), gde je

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$$

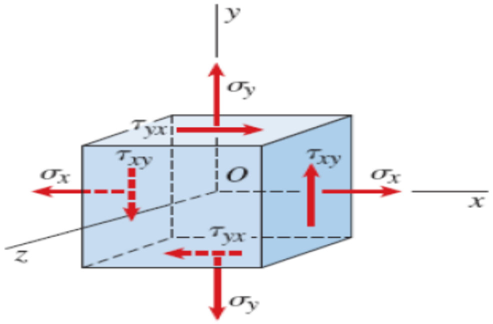


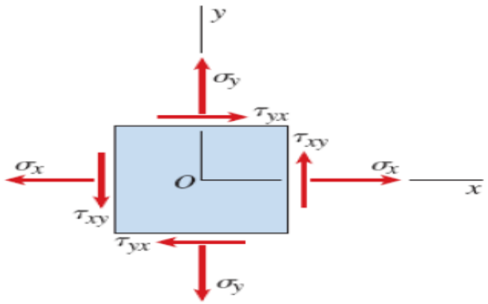
prostorno stanje napona (Sl.3), gde je

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

NAPONI I DEFORMACIJE

- **Ravno stanje napona**
- Ravno stanje napona – jedinstveno predstavljeno s dve komponente normalnog napona i jednom komponentom tangencijalnog napona koji djeluju na element s određenim položajem u tački elementa.





$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

NAPONI I DEFORMACIJE

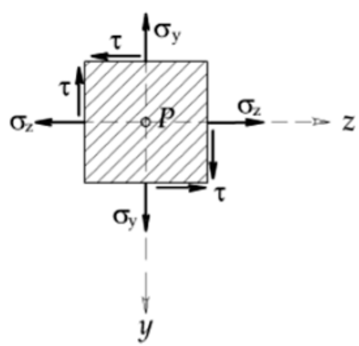
- Veličina normalnih napona u tački, za ravan sa normalom , zavisi od

nagiba te ravni u odnosu na koordinatne ose.

- Pravce glavnih normalnih napona određuje ugao ϕ :

Postavka: Poznata je matrica napona u Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$S^P = \begin{Bmatrix} \sigma_y & \tau \\ \tau & \sigma_z \end{Bmatrix}$$



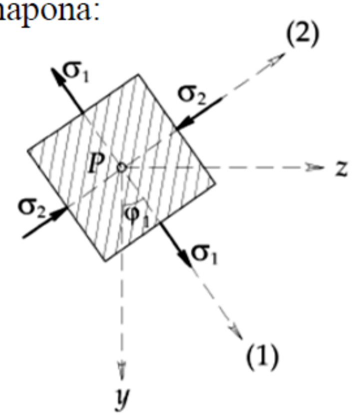
Na osnovu nje treba odrediti pravce glavnih normalnih napona

Izraz za računanje pravaca glavnih normalnih napona:

$$\mathbf{tg2\varphi_{1,2}} = \frac{\mathbf{2\tau}}{\boldsymbol{\sigma_y - \sigma_z}}$$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\varphi_{1,2}$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$$

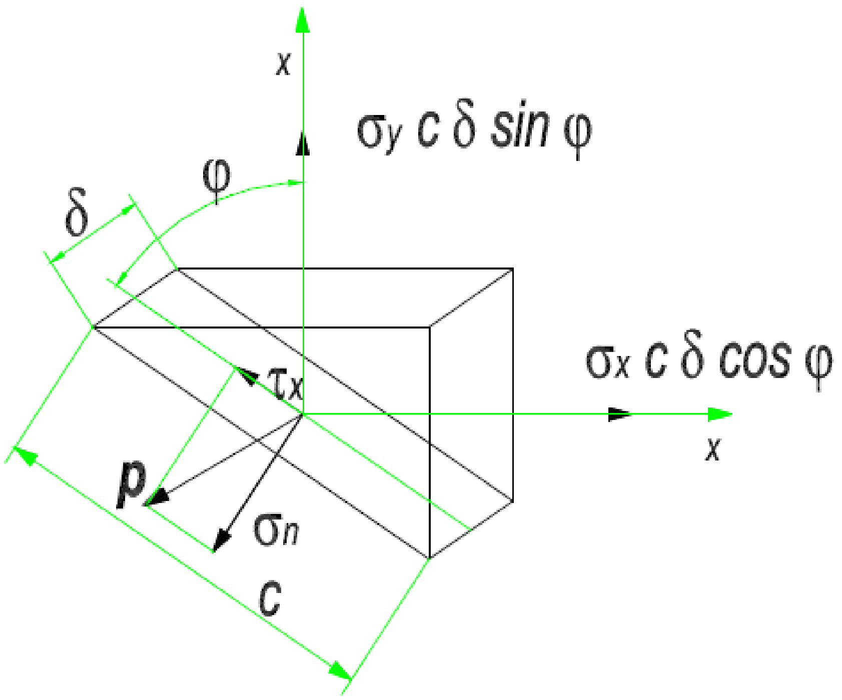


NAPONI I DEFORMACIJE

- Komponentalni naponi u kosom preseku

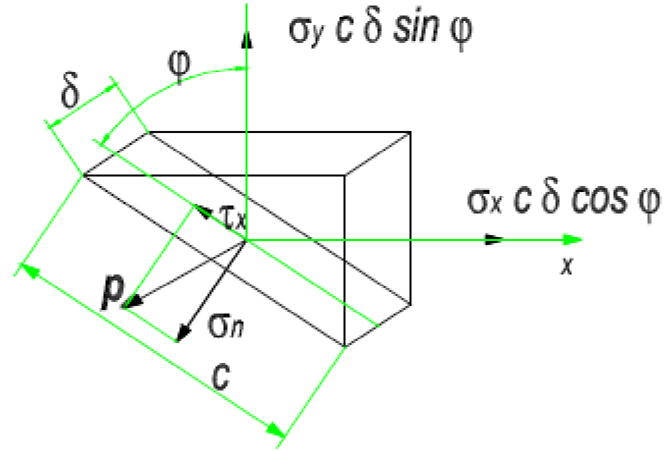
$A_x = c\,\delta\cos\varphi$

$A_y = c\,\delta\sin\varphi$



NAPONI I DEFORMACIJE

- Komponentalni naponi u kosom preseku



$$\sum X_i = \sigma_x c\delta \cos\varphi - \sigma_n cb \cos\varphi - \tau\, c\delta \sin\varphi = 0$$

$$\sum Y_i = \sigma_y c\delta \sin\varphi - \sigma_n cb \sin\varphi + \tau\, c\delta \cos\varphi = 0$$

NAPONI I DEFORMACIJE

Komponentalni naponi u kosom preseku

$$\sum X_i = \sigma_x c\delta \cos\varphi - \sigma_n cb \cos\varphi - \tau\, c\delta \sin\varphi = 0$$

$$\sum Y_i = \sigma_y c\delta \sin\varphi - \sigma_n cb \sin\varphi + \tau\, c\delta \cos\varphi = 0$$

$$\sigma_n \cos\varphi + \tau \sin\varphi = \sigma_x \cos\varphi$$

$$\sigma_n \sin\varphi - \tau \cos\varphi = \sigma_y \sin\varphi$$

NAPONI I DEFORMACIJE

- Komponentalni naponi u kosom preseku

$$\sigma_n \cos\varphi + \tau \sin\varphi = \sigma_x \cos\varphi \qquad \Big| \cdot \cos\varphi$$

$$\sigma_n \sin\varphi - \tau \cos\varphi = \sigma_y \sin\varphi \qquad \Big| \cdot \sin\varphi$$

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

Saberemo jednačine i dobijamo normalni napon

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi$$

NAPONI I DEFORMACIJE

- Komponentalni naponi u kosom preseku

$$\sigma_n \cos\varphi + \tau \sin\varphi = \sigma_x \cos\varphi \qquad \Big| \cdot \sin\varphi$$

$$\sigma_n \sin\varphi - \tau \cos\varphi = \sigma_y \sin\varphi \qquad \Big| \cdot \cos\varphi$$

$$\sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

Oduzmemo drugu jednačinu od prve i dobijamo tangencijalni napon

$$\tau_n = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi$$

NAPONI I DEFORMACIJE

- Hukov zakon za linearno (aksijalno) naprezanje:
- Veza između napona i deformacija je linearna algebarska.

$$\boxed{\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$\sigma_z = \dfrac{F}{A}$ - napon u pravcu ose z

$\varepsilon_z = \dfrac{\Delta l}{l}$ - podužna deformacija - dilatacija - u pravcu ose z

Faktor proporcionalnosti E [Pa] u Hukovom zakonu zove se modul elastičnosti ili Jangov modul elastičnosti:

$$E = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}$$

NAPONI I DEFORMACIJE

- **Veza između podužnih i poprečnih deformacija**

$$\varepsilon_P = -\nu \cdot \varepsilon_z$$

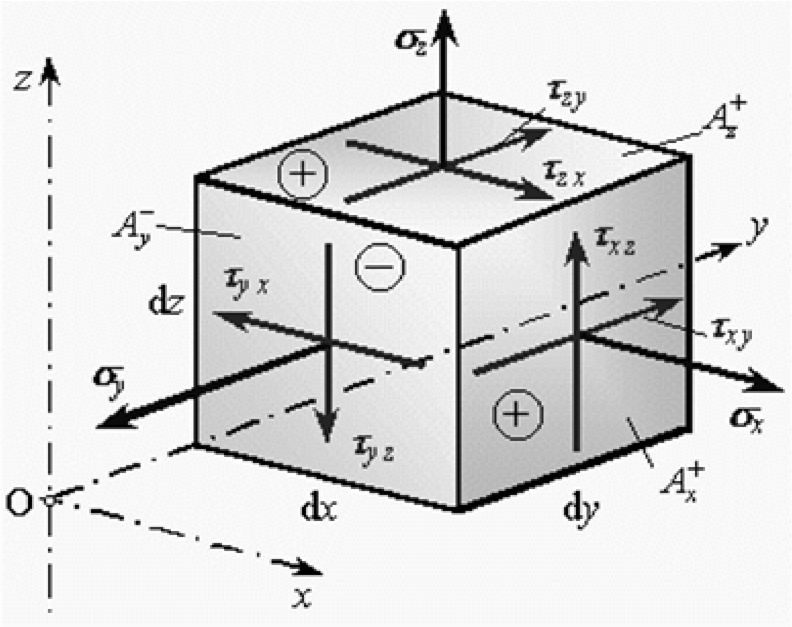
- Podužna deformacija: $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta l}{l}$

- Poprečna deformacija: $\varepsilon_p = \dfrac{\Delta d}{d}$

- Faktor proporcionalnosti ν u vezi između poprečnih i podužnih
- deformacija zove se Poasonov broj.
- Poasonov broj se kreće u opsegu od 0 do 0,5.

NAPONI I DEFORMACIJE

- **Veza napona i deformacija za prostorno naprezanje**
- (uopšteni Hukov zakon)



NAPONI I DEFORMACIJE

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] + \alpha \cdot t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] + \alpha \cdot t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

t - temperatura [°C]
α koef. termičke dilatacije [1/°C]

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

G - modul klizanja [Pa]